

Pravítkový kanón

Stanislav Panoš*, Hynek Němec**

*Gymnázium F. X. Šaldy, Liberec, Partyzánská 530, příspěvková organizace

**Fyzikální ústav AV ČR, v. v. i., Na Slovance 1999/2, 182 00 Praha 8

Abstrakt

Na pomůcky nenáročná experimentální úloha Kanón z pravítek pochází ze soutěže Turnaj mladých fyziků. Příspěvek představí, jak si lze vyhrát s tímto jednoduchým experimentem od jeho jednoduchého popisu až po důkladnou analýzu.

Úvod

Úloha Pravítkový kanón pochází ze sady 17 problémových úloh [1] zadaných ve 38. ročníku středoškolské soutěže Turnaj mladých fyziků. Více se lze o soutěži a právě ukončeném ročníku dočíst v časopisu Matematika-Fyzika-Informatika [2]. Úlohy této soutěže jsou úlohami problémovými s volným zadáním umožňujícím tvůrčí přístup k řešení zadaného problému. Svým pojetím je tato soutěž výjimečná a často převládá názor, že i velmi obtížná. Tomuto přesvědčení někdy napomáhá skutečnost, že pokud se organizátoři Turnaje mladých fyziků snaží soutěž propagovat na akcích typu Veletrh vědy, tak představují řešení úloh na nejvyšší úrovni. Úroveň, na které soutěží reprezentanti ČR na mezinárodním finále této soutěže, může případné nové zájemce o soutěžení vystrašit nebo dokonce odradit. Cílem tohoto příspěvku je ukázat různé možnosti, jak úlohu zpracovat na úrovni okresního kola soutěže. Pro zajímavost bude uveden i nástin vrcholného řešení reprezentačního družstva.

Zadání úlohy

Překlad zadání z anglického originálu do češtiny zní:

„Dvě pravítka jsou pevně držena proti sobě. Mezi ně je blízko jednoho z jejich konců vložen kulatý projektil (např. víčko plastové láhve nebo kulička). Když na povrch pravítek zapůsobí dodatečná síla, projektil vystřelí velkou rychlostí. Prozkoumejte tento jev a parametry ovlivňující rychlost výstřelu.“

Jak může pravítkový kanon vypadat si lze prohlédnout na následujícím obr. 1.



Obr. 1. Pravítkový kanón orientovaný pro střelbu vzhůru (foto autor).

Je vidět, že zadání nechává poměrně velkou volnost v realizaci popsaného experimentu. Zadání nechává volnost ve volbě délky použitých pravítek, jejich materiálu, způsobu udržení pravítek u sebe, ... Vše je shrnuto do závěrečné instrukce „Prozkoumejte tento jev a parametry ovlivňující rychlost výstřelu.“.

Řešení úlohy

Jak k úloze přistoupit? Základem řešení by mělo být kvalitativní objasnění fyzikálního principu. Dále je možné provést jednoduché experimenty s cílem zjistit, které parametry ovlivňují chování kanonu. Na základě experimentů je vhodné pokusit se vytvořit alespoň jednoduchý teoretický model a směřovat k optimalizaci parametrů pro maximální dostřel této fyzikální hračky.

Princip

V úloze se využívá pružnosti použitých pravítek. Pro jednoduchost si lze představit, že jedno z pravítek položíme na stůl a působící silou ohýbáme pouze druhé pravítko tak, jak je vyznačeno na obr. 2.



Obr. 2. Jednoduchý model s jedním deformujícím se pravítkem.

Pokud bychom použili dvě rovnoběžná pravítka, pak by body dotyku mezi kuličkou a pravítky byly přesně nad sebou. Působící síla by pouze deformovala kuličku, ale nedošlo by k výstřelu. Předpokládejme, že se vystřelovaná kulička během pokusu nedeformuje. Síly působící v místech dotyku mají směr normál k povrchu kuličky v daných bodech.

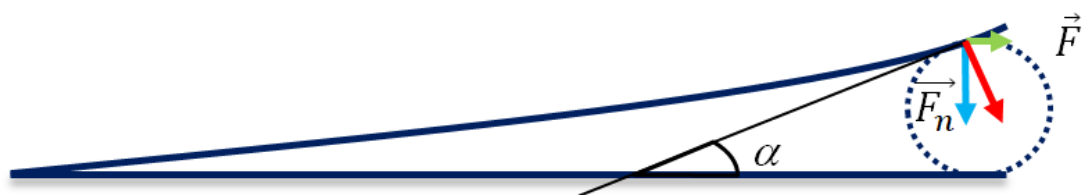
Vrchní pravítko začneme postupně deformovat zvyšováním působící síly.

Sílu $\vec{F}_c$ působící v místě dotyku horního pravítka s kuličkou můžeme rozložit na vodorovnou $\vec{F}$ a svislou složku $\vec{F}_v$. Pro jejichž velikosti platí:

$$F = F_c \cdot \sin \alpha \quad a \quad F_v = F_c \cdot \cos \alpha$$

Úhel α lze odečíst mezi tečnami sestrojenými v bodech dotyku pravítek s kuličkou jako na obr. 3. Protože spodní pravítko se nedeformuje, síla působící ve spodním bodě má pouze svislou složku. Vodorovná složka síly působící v horním bodě se snaží „vystřelit“ kuličku, zatímco svislá síla se podílí na vzniku statického tření mezi pravítky a kuličkou. Kulička zůstane v klidu, dokud vodorovná síla nebude větší než statické tření mezi pravítky a kuličkou. Během deformace vrchního pravítka se posouvá bod dotyku kuličky s tímto pravítkem. To má za následek změnu úhlu síly působící v bodě dotyku. V důsledku změny klesá tření mezi kuličkou a pravítky při růstu urychlovací síly. Výstřel nastává v okamžiku, kdy urychlovací síla překoná statické tření. Tento stav lze popsat pomocí mezního úhel α_{max} . Velikost mezního úhlu závisí na koeficientu tření mezi kuličkou a pravítky. Kromě pružnosti pravítek a jejich délky se stává velikost tření dalším klíčovým parametrem

ovlivňujícím vlastnosti pravitkového kanónu. Nakonec je třeba zmínit hmotnost kuličky, kdy z druhého Newtonova zákona zcela triviálně vyplývá, že těžší kulička bude vystřelena s menším zrychlením než lehčí.



Obr. 3. Rozklad působící síly při deformaci pravitka.

Z výše uvedeného popisu je zřejmé, že označení pravitkový kanón v názvu úlohy není zcela přesné, protože se vlastně jedná o mechanické zařízení podobně jako prak nebo katapult, nikoliv o kanón v pravém slova smyslu. Působením práce střelce je ukládána energie do pružnosti pravitka nebo pravitku, která je následně uvolněna. Podobně je při natahování praku ukládána energie do gumy. Naopak u skutečného kanónu je využita chemická energie střelného prachu, k čemuž zde nedochází.

Jednoduché experimenty

K prozkoumání chování pravitkového kanónu se jako nejjednodušší jeví studování rychlosti vystřelené kuličky bezprostředně po výstřelu. K tomu lze použít video analýzu záznamu výstřelu například pomocí programu Tracker, využít sonar, nebo určit počáteční rychlost kuličky pomocí vodorovného, šikmého nebo svislého vrhu. Na pomůcky nejjednodušší se jeví vodorovný nebo šikmý vrh, kdy lze využít dopad kuličky do písku a tím zajistit přesnou lokalizaci místa dopadu.

Příklady jednoduchých řešení z okresního kola soutěže

V okresním kole soutěže hodnotitelé neočekávají definitivní řešení úlohy. Předpokládá se, že předložená řešení nebudou zásadně chybná, budou obsahovat systematický přístup k řešenímu problému a získané výsledky budou přehledně reportovány. Dojde-li na hlubší analýzu získaných dat, je to považováno za významné plus. V neposlední řadě hodnotitelé očekávají, že dílčí řešení odevzdané v okresním kole bude mít potenciál dalšího rozvoje.

Jak může takové řešení vypadat si můžeme demonstrovat na řešení studenta Tomáše Nikela z Gymnázium Olgy Havlové v Ostravě-Porubě. Tomáš si zvolil dvě plastová pravitka standardní délky 30 cm a jako projektil použil pingpongový míček. Míček nechal po výstřelu valit se po stole. Rychlost vystřeleného míčku stanovil z času potřebného k překonání zadaného úseku. Ve svém zkoumání se zaměřil na dva parametry – na místo působení sil tisknoucích pravitka k sobě a na kvalitu povrchu pravitků. V obou případech zkoumal dvě situace, tedy dvě místa působení sil a dva různé povrchy. V jednom případě použil samotná pravitka a ve druhém měnil kvalitu povrchu pravitků omotáním pravitků toaletním papírem. Ve všech případech se pokusil o jednoduchou statistiku, kdy provedl za stejných podmínek 5 měření. Své výsledky prezentoval v podobě tabulky na obr. 4.

Z uvedených dat je vidět, že v uvedené sestavě je vhodnější, aby síla působila na pravitka blíže k jejich spojenému konci. V případě povrchu je prokazatelně vidět, že kanón

s pravitky potaženými toaletním papírem vykazuje horší výsledky, tj. pingpongový míček vystřeluje výrazně nižší rychlostí. K řešení lze mít výhrady k nesmyslnému počtu desetinných míst u hodnot uváděných v tabulce. Počet míst neodpovídá reálné přesnosti měření, jaké mohlo být během experimentů dosaženo. Předložené řešení prokázalo, že student se úkolu ujal systematicky a zkoumal relevantní parametry, proto bylo hodnotiteli doporučeno, aby postoupil do dalšího kola soutěže.

5. Výsledky měření a analýza dat

rychlosti (m/s)					
místo působení síly	měření 1	měření 2	měření 3	měření 4	měření 5
15 cm od pevného bodu	1,76471	1,66666	1,76471	1,57895	1,66666
8 cm od pevného bodu	2,14286	1,875	1,875	2	1,875

rychlosti (m/s)					
povrch	měření 1	měření 2	měření 3	měření 4	měření 5
plast	2,14286	1,875	1,875	2	1,875
toaletní papír	0,375	0,3	0,375	0,4285	0,33

Obr. 4. Výsledky měření provedených studentem Nikelem.
(zdroj: řešení studenta Tomáše Nikela)

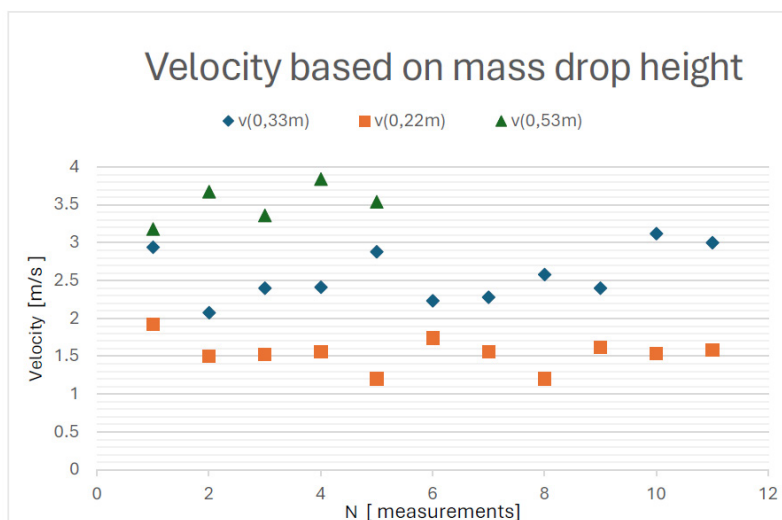
Dalším příkladem dobrého řešení na úrovni okresního kola je řešení Daniela Becka z Mendelova gymnázia v Opavě. Daniel použil dvě plastová pravitka a kovovou kuličku jako projektil. Sestavu je vidět na obr. 5. Výstřel inicioval pádem závažíčka, které při dopadu stlačilo pravitka k sobě. Rychlost vylétující kuličky získával na základě video analýzy letu kuličky, který představoval šikmý vrh. Zaměřil se na závislost rychlosti vylétující kuličky na výšce, ze které padalo iniciační závažíčko, tedy na velikosti počátečního impulsu.



Obr. 5. Měřicí sestava studenta Becka. (zdroj: řešení studenta Daniela Becka)

Poměrně nepřekvapivý výsledek, že větší výška, ze které bylo puštěno iniciační závaží, znamená větší rychlost vystřelené kuličky, jasně demonstruje graf na obr. 6.

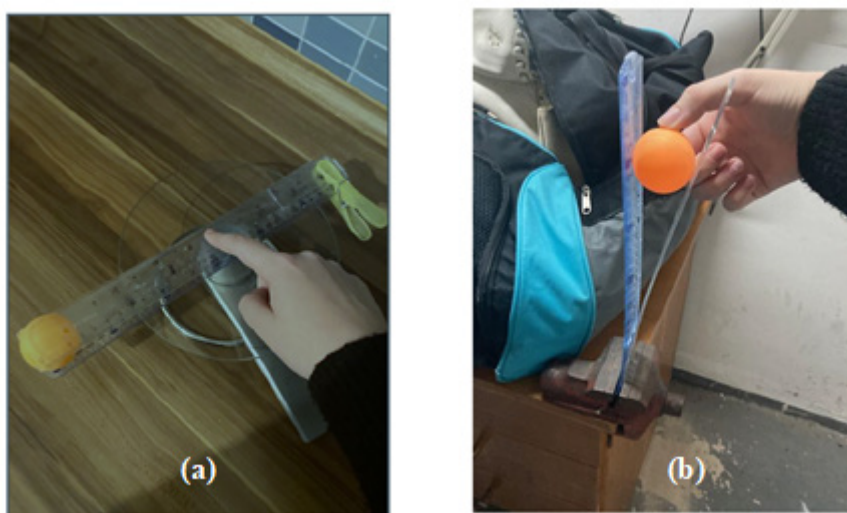
Student se pokusil opakováním měření ověřit reprodukovatelnost výsledků, dále pak stanovil průměrné rychlosti a diskutoval možné zdroje chyb měření. Opět student prokázal systematický přístup a řešení bylo uznáno jako vyhovující pro postup do dalšího kola.



Obr. 6. Graf rychlostí vystřelené kuličky v závislosti na výšce pádu iniciačního závaží.
(zdroj: řešení studenta Daniela Becka)

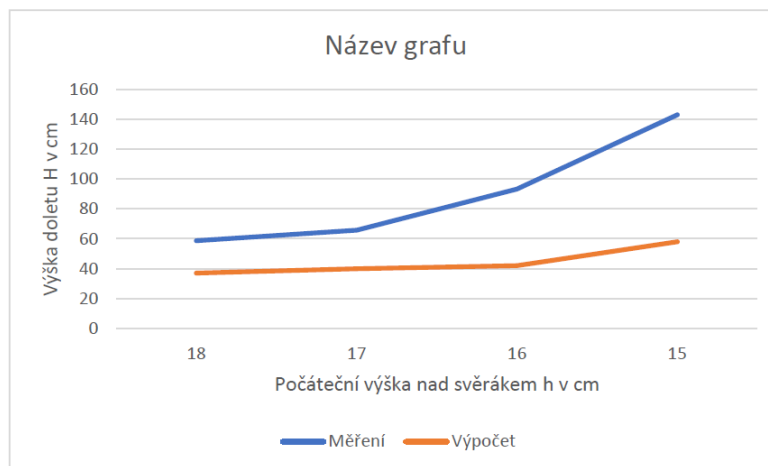
Je škoda, že někteří soutěžící mají při řešení dobré nápady, nicméně se získanými daty již dále nepracují, nedokáží je dostatečně přehledně prezentovat nebo z nich nevyvodí žádné závěry.

Příkladem inspirativního řešení je práce studentky Mahuleny Šídlové z Gymnázia Arabská v Praze. Podobně jako jiní zvolila dvě plastová pravítka a pingpongový míček. V jejím řešení se postupně objevují dva zajímavé triky. Prvním je využití kuchyňské váhy pro měření síly, kterou deformuje pravítka před výstřelem, viz obr. 7a. Druhým trikem je upnutí pravítek do svěráku a orientace pravítek směrem vzhůru, viz obr. 7b.



Obr. 7. Některé inspirativní nápady. (zdroj: řešení Mahuleny Šídlové)

Orientace střelby směrem vzhůru značně zjednodušuje měření rychlosti vystřeleného míčku, protože analyzujeme pohyb jen v jedné ose oproti vodorovnému nebo šikmému vrhu. Studentka se pokusila studovat vliv místa stisknutí pravítek na velikost rychlosti vystřeleného míčku. Výsledky si lze prohlédnout v grafu na obr. 8 a odchylky měření v tabulce na obr. 9.



Obr. 8. Závislost výšky výstřelu na poloze místa stisku pravítek.
(zdroj: řešení Mahuleny Šídlové)

h v cm	směrodatná odchylka v cm
18	9,45
17	11,09
16	2,09
15	3,54

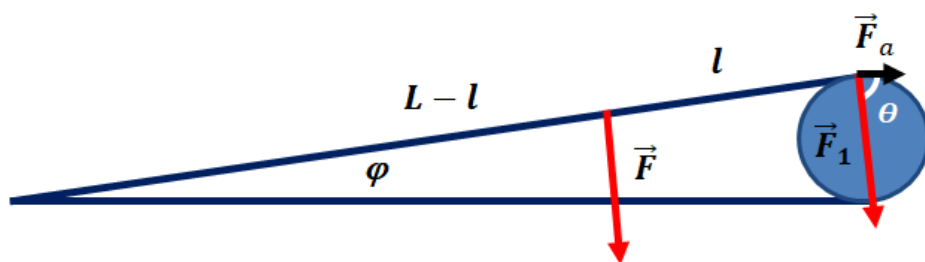
Obr. 9. Tabulka s přehledem směrodatných odchylek pro jednotlivá měření.
(zdroj: řešení Mahuleny Šídlové)

Z tabulky a grafu je vidět, že pro případy, kdy míček vyletuje nejnižšími rychlostmi je směrodatná odchylka extrémně vysoká. Tabulka je bohužel nepřehledná, směrodatná odchylka se vztahuje k výšce výstřelu, nikoliv k výšce místa, kde dochází ke stisku pravítek, jak by se na první pohled mohlo zdát. Orientaci se střelbou vzhůru použilo i reprezentační družstvo Iránu, které tuto úlohu prezentovalo na mezinárodním kole Turnaje mladých fyziků. Iránci ve svém řešení použili pro studium úlohy záznam z vysokorychlostní kamery. Až zde se ukázalo, že v případě, kdy míček vyletuje malou rychlostí, se nedefinovaně rozkmitá ze strany na stranu. Při pohybu ze strany na stranu se třením o pravítka zpomaluje. Tento děj je náhodný, proto se vliv tření projevuje nepravidelně a promítá se do obrovského rozptýlu výšek, do kterých je míček vystřelen.

Nástin podrobného řešení reprezentačního družstva

Úloha na úrovni mezinárodního finále vyžaduje, aby obsahovala systematický výzkum dané problematiky spolu s teoretickým popisem. Teoretický popis by měl být porovnán s experimentálními daty a případné nesrovnalosti diskutovány.

České družstvo připravilo řešení, kdy zvolilo model jednoho „pevného“ pravítka a jednoho pružného pravítka. „Pevné“ pravítko bylo položeno na stole, aby se neprohýbalo. Celkem použili 9 různých kuliček ze 3 materiálů (polypropylen, PVC, ocel) a 8 různých pravítek ze 3 materiálů (polyetylen, PVC, dřevo). Kuličkové projektily vystřelovali vodorovným směrem po stole a pomocí sonaru Vernier sledovali jejich pohyb. Pro měření síly působící na pravítko zvolili čidlo stisku ruky Vernier. Kromě kombinace různých délek pravítek L , různých materiálů pravítek a různých vystřelovaných kuliček studovali vliv vzdálenosti l místa, kde působí iniciační síla. Viz obr. 10.



Obr. 10. Schéma uspořádání experimentu reprezentačního družstva.

Délka pravítek je označena jako L , poloha působíště síly měřená od volného konce pravítka l , úhel rozevření pravítka φ a úhel θ mezi působící silou v místě dotyku pravítka a kuličky a vodorovným směrem. Síla F je vnější síla působící deformaci pravítka, síla F_1 je síla působící v místě dotyku horního pravítka a kuličky.

Pro teoretický model byly stanoveny tyto předpoklady:

- Spodní pravítko a kulička jsou absolutně tuhá tělesa
- Kulička rozevře pravítko na vzdálenost $2r$
- Síla působí kolmo na pravítko
- Deformace pravítka je aproximována Eulerovým ohybem: $\frac{dy}{dx} \ll 1$

Aby došlo k výstřelu, musí síla F_a překonat třecí sílu mezi pravítky a kuličkou. Kulička zůstává v klidu, dokud:

$$F_1 \cos \theta_c \leq F_1 \mu_s \sin \theta_c \quad (1)$$

Rovnost nastává pro kritický úhel θ_c , ze kterého lze stanovit součinitel tření mezi kuličkou a pravítky:

$$\mu_s = \tan \theta_c \quad (2)$$

V rovnicích se vykrátí síla, z čehož vyplývá, že pokud by se žádné z pravítek nedeformovalo, pravítkový kanon by nestřílel. Pro neměnný součinitel tření a úhel θ působící síly je výše uvedená nerovnice splněná stále, tj. tření „nepustí“ kuličku. K úspěšné konstrukci pravítkového kanonu potřebujeme pružné horní pravítko.

Z deformace pravítka podél osy x lze stanovit kritickou sílu potřebnou pro výstřel.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3)$$

V rovnici (3) M označuje ohybový moment působící síly a EI je součin Youngova modulu pružnosti E a kvadratického moment průřezu I . Součin EI lze nazvat „nepoddajností“ pravítka, tj. analogií tuhosti pružiny.

Rozborem úlohy studenti došli k teoretické hodnotě velikosti síly potřebné k vystřelení kuličky z pravitkového kanónu:

$$F_c = \frac{2EIL(\sin\varphi \cos\varphi + \sqrt{\sin^2\varphi \cos^2\varphi - (\sin^2\varphi - \cos^2\theta)(\cos^2\varphi - \cos^2\theta)})}{l^2(L-l)(\cos^2\varphi - \cos^2\theta)} \quad (4)$$

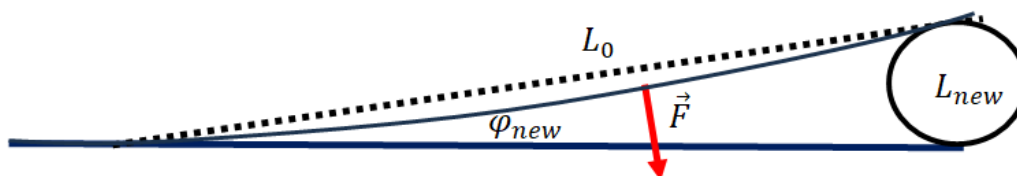
Ze zákona zachování mechanické energie odhadli počáteční rychlost vystřelené kuličky dle vztahu:

$$v = \sqrt{\frac{2\bar{F}r}{m}}, \quad (5)$$

kde $\bar{F}r$ představuje mechanickou práci síly působící po dráze r , než dojde k výstřelu. Protože se síla během stlačování pravitku mění, je použita její střední hodnota $\bar{F}$. Poslední proměnná m je hmotnost vystřelované kuličky.

Během porovnávání experimentálních výsledků a teoretických předpovědí se objevila nutnost modifikovat třecí sílu v rovnici (1). Původní model předpokládal, že v místě dotyku kuličky s horním pravitkem a v místě dotyku se spodním pravitkem působí stejně velká síla. Pro těžší kuličky je však třeba uvažovat s tíhou kuličky a v místě dotyku kuličky se spodním pravitkem počítat i s tíhou kuličky.

Posledním vylepšením teorie, které studenti započítali, byla změna aktivní délky pružné části pravitka a úhlu mezi oběma pravitky při prohnutí horního pravitka. Více napoví obr. 11. Jak se změní aktivní délka pravitka, ukazuje vztah (6).



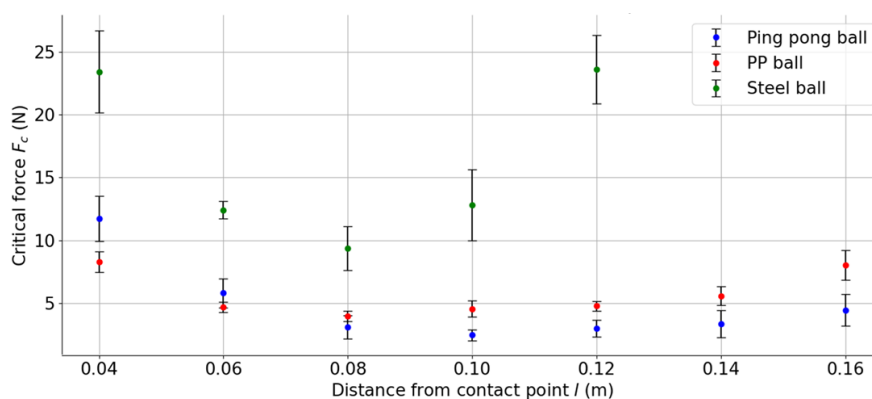
Obr. 11. Změna parametrů během průhybu pravitka.

$$L_{new} = \sqrt{\left(\frac{1}{\cos\theta} \sqrt{3(L_0 - l)^2 - \frac{6EIL_0 \tan\theta}{Fl}} - L_0 \cos\theta\right)^2} + L_0 \sin\theta \quad (6)$$

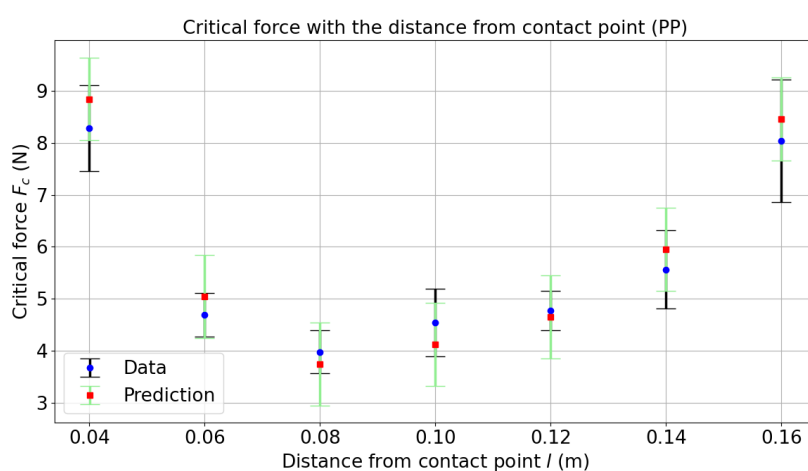
Nakonec musel být teoretický model vyřešen numericky.

Získané výsledky experimentů byly prezentovány formou grafů. Zde je několik ukázek.

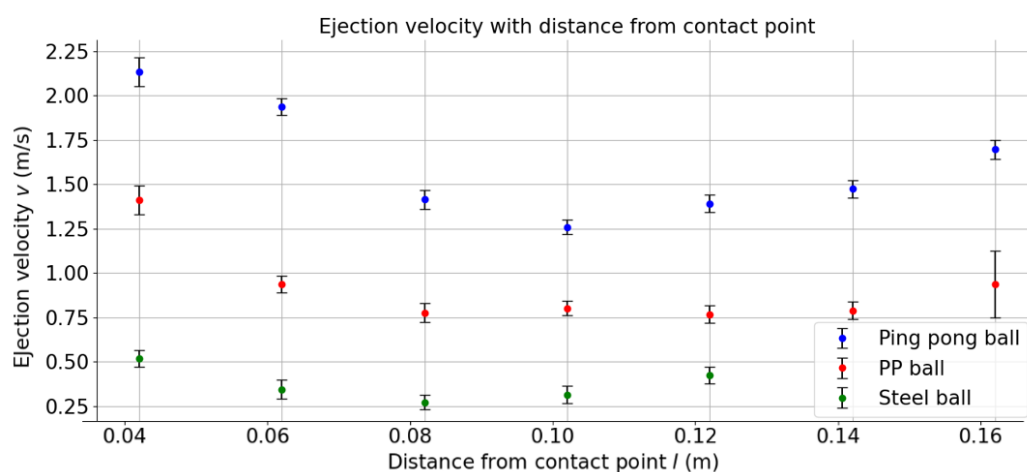
Prvním grafem na obr. 12 je závislost kritické síly potřebné k výstřelu na místě jejího působení pro různé kuličky. Je vidět, že ve všech případech existuje minimum této závislosti. Představu o shodě teoretického modelu a experimentálních dat si lze udělat z následujícího obr. 13. Nejzajímavější graf je na obr. 14, kde lze vidět závislost rychlosti vystřelené kuličky na poloze síly stlačující pravitka k sobě. Z grafu lze odvodit, že pro maximální rychlost vystřelené kuličky je nejvhodnější pravitka stlačovat blízko místa dotyku pravitků s kuličkou, což má za následek velký průhyb horního pravitka a tím i velkou vodorovnou složku působící síly.



Obr. 12. Závislost velikosti kritické síly na poloze jejího působení.
(zdroj: řešení reprezentačního družstva)



Obr. 13. Porovnání experimentálních dat a teoretického modelu.
(zdroj: řešení reprezentačního družstva)



Obr. 14. Závislost rychlosti vystřelené kuličky na poloze místa stisknutí pravítek.
(zdroj: řešení reprezentačního družstva)

Závěr

Tento příspěvek si kladl za cíl ukázat, že úlohy ze soutěže Turnaj mladých fyziků mohou být řešeny na různé úrovni od jednoduchého popisu experimentu po komplexní řešení. V minulosti byla často prezentována právě až komplexní řešení na úrovni mezinárodního finále, která ovšem svou složitostí mohou zejména začínající zájemce o Turnaj od účasti odradit. V příspěvku bylo proto představeno několik jednoduchých řešení jako ukázka minimálního standardu pro okresní kolo. I z takových začátků lze následně směřovat k rozsáhlejšímu řešení.

Literatura

- [1] *Turnaj mladých fyziků-Zadání úloh 38. ročníku (2024/25)*. [cit. 14. 9. 2025]. Dostupné online: <https://www.tmfcr.cz/tasks.php?y=38>
- [2] Kolář K., Němec H.: *Turnaj mladých fyziků 2025*. M-F-I Vol 34 No 3 (2025), p. 237–240.