

17. Falling book cover

Marek Fürst

12. 10. 2025

Zadání

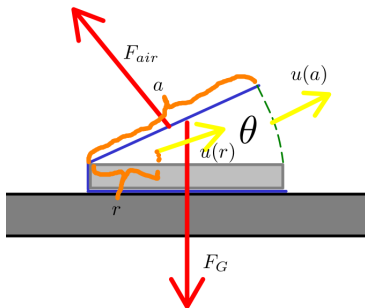
- ▶ **Oficiální znění:** A book is placed horizontally, and the partially open cover is allowed to fall. Investigate the motion of the falling book cover.
- ▶ **Český překlad:** Knihu položte na vodorovnou podložku a částečně otevřete její desky. Pust'te desky a nechte je volně padat. Prozkoumejte pohyb padajících desek knihy.

Co je na pádu desek knihy zajímavého?

- ▶ Neslyšíme hlasitý náraz
- ▶ Před dopadem dochází k brždění desek.
- ▶ Působí tam odpor vytlačovaného vzduchu.

Pantaleonův model

- ▶ Z článku z kitu: J. Pantaleone. How the air slows a closing book. Am. J. Phys. 92, 1, 7-13 (2024), <https://doi.org/10.1119/5.0106926>
- ▶ Model uvažuje 2 síly - tíhovou F_G a odpor vzduchu F_{air} a s nimi asociované momenty sil Γ_G a Γ_{air}



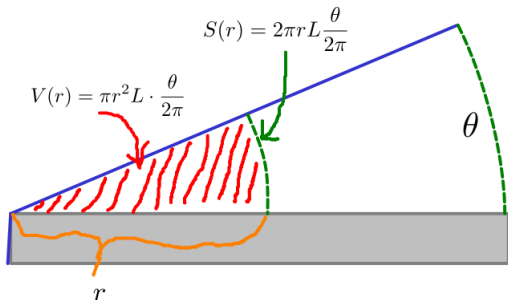
Obrázek: Náskres systému a působících sil

Pantaleonův model - výpočet momentů sil

- ▶ Tíhová síla: $\Gamma_G = \frac{1}{2}aF_G \cos(\theta) \approx \frac{1}{2}aF_G$
- ▶ Odpor vzduchu - z energetické bilance: výkon odporu vzduchu = změna kinetické energie vzduchu pod knihou s časem + kinetická energie vzduchu odcházejícího ven z pod knihy.
Matematicky $-\Gamma_{air}\omega = \frac{dK_{in}}{dt} + S_{out}$

Pantaleonův model - proudění vzduchu

- ▶ Objem vzduchu pod knihou vzdáleného od vazby o méně než r : $V(r) = \frac{\theta}{2} r^2 L$
- ▶ Objemový tok vzduchu z oblasti vzdálené o méně než r :
 $\phi = -u(r)S(r) = -u(r)Lr\theta$
- ▶ Rovnice kontinuity + předpoklad konstantní hustoty - tok vzduchu ven ϕ je roven změně objemu $\phi = -\frac{\omega}{2} r^2 L$
- ▶ Odsud jde vyjádřit $u(r) = -\frac{1}{Lr\theta}\phi = r\frac{\omega}{2\theta}$



Pantaleonův model - kinetická energie vzduchu

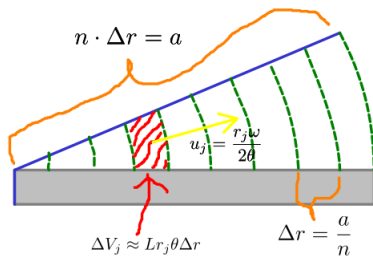
- ▶ Již jsme spočítali $u(r) = r\frac{\omega}{2\theta}$ a $\phi = -u(r)Lr\theta$
- ▶ Hustota kinetické energie vzduchu jde počítat jako $\frac{1}{2}\rho u^2$

- ▶ Kinetická energie vzduchu pod knihou

$$K_{in} = \int_0^a \frac{1}{2}\rho u^2 Lr\theta dr = \int_0^a \frac{1}{8}\rho r^3 \omega^2 \theta^{-1} L dr = \frac{\rho a^4 L \omega^2}{32\theta}$$

- ▶ Kinetická energie vzduchu vycházejícího ven

$$S_{out} = \frac{1}{2}\rho u^2 \cdot \phi = -\frac{\rho L a^3 \omega^3}{16\theta^2}$$



$$K_{in} \approx \sum_{j=1}^n \frac{\rho u_j^2}{2} \Delta V_j \approx \sum_{j=1}^n \frac{\rho L \omega^2}{8\theta} r_j^3 \Delta r = \frac{\rho L \omega^2}{8\theta} \sum_{j=1}^n r_j^3 \Delta r \rightarrow \frac{\rho L \omega^2}{8\theta} \int_0^a r^3 dr$$

Pantaleonův model - dotažení

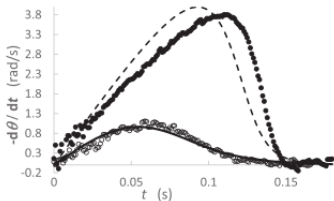
- ▶ Již víme $K_{in} = \frac{\rho a^4 L \omega^2}{32\theta}$ a $S_{out} = -\frac{\rho a^3 L \omega^3}{16\theta^2}$
- ▶ Chceme dosadit do $-\Gamma_{air}\omega = \frac{dK_{in}}{dt} + S_{out}$
- ▶ Derivováním vyjde $\frac{dK_{in}}{dt} = -\frac{\rho a^3 L \omega^3}{32\theta^2} + \frac{\rho a^4 L \omega \varepsilon}{16\theta}$
- ▶ Tím pádem $\Gamma_{air} = \frac{3\rho a^3 L \omega^2}{32\theta^2} - \frac{\rho a^4 L \varepsilon}{16\theta}$
- ▶ Druhá věta impulsová $I\varepsilon = \Gamma_{air} - \Gamma_G$
- ▶ Vyjde rovnice pro úhlové zrychlení
$$\left(I + \frac{\rho a^4 L}{16\theta}\right)\varepsilon = \frac{3\rho a^3 L \omega^2}{32\theta^2} - \frac{1}{2}aF_G$$
- ▶ To je obdoba 2. Newtonova zákona pro úhlové zrychlení
- ▶ Rovnici jde řešit numericky - dělat simulaci

Pantaleonův model - meze a limity

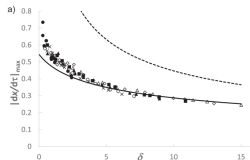
- ▶ Zanedbán tok vzduchu ven skrze horní a dolní okraj knihy
- ▶ Zanedbává se závislost tíhové síly na úhlu pootevření (funguje jen pro malé úhly)
- ▶ Předpoklad konstantní hustoty vzduchu (nestlačitelnost) a nevazkého proudění

Experimenty z Pantaleonova článku

- ▶ Závislost úhlové rychlosti na čase
- ▶ Závislost maximální úhlové rychlosti na počátečním úhlu
- ▶ Závislost maximální rychlosti na parametrech knihy (redukuje parametry na jediný bezrozměrný)



Obrázek: Závislost $\omega(t)$ (graf převzat z Pantaleonova článku)



Obrázek: Závislost $\omega_{max}(\delta)$ (zbezrozměrněný čas a úhel), kde $\delta = \frac{16I\theta_0}{\rho L a^4}$ (graf převzat z Pantaleonova článku)

Další nápady na experimenty

- ▶ Vždy je lepší měřit i něco jiného než co je v člancích
- ▶ Závislost úhlu na čase
- ▶ Celková doba pohybu v závislosti na parametrech (pozor ujasnit si co chápete pod pojmem dopad)
- ▶ Fázový portrét úhel vs úhlová rychlost
- ▶ Cokoliv smysluplného co vás napadne

Co s úlohou?

- ▶ Základní cíle
 - ▶ Porozumět Pantaleonovu modelu
 - ▶ Sestavit experimentální aparaturu a ověřit model (ideálně i jinou závislost než v článku)
 - ▶ Zkoušet měnit alespoň jeden parametr (rozměry knihy, počáteční úhel, hmotnost desek, ...)
- ▶ Pro ambicióznější řešitele
 - ▶ Vnést do úlohy nějakou novou myšlenku
 - ▶ Pokusit se model rozšířit (např. o únik vzduchu skrze boky nebo uvážit závislost tíhové síly na úhlu pro více otevřenou knihu)
 - ▶ Systematicky studovat závislost na více parametrech
 - ▶ Experimenty dobře kontrolované
- ▶ Pro TMF ultras
 - ▶ Pokročilý model proudění vzduchu mezi deskami
 - ▶ Brožovaná vazba - není tuhé těleso
 - ▶ Experimenty řádně statisticky zpracovat (přenos chyb atd.)
- ▶ Možná je samozřejmě i jiná cesta než ta, kterou tu naznačuji

Kam dál?

- ▶ Primární zdroj je reference kit <https://kit.ilyam.org/>
- ▶ konzultant úlohy <furstmarek@seznam.cz>
- ▶ nebo někde jinde

Děkuji za pozornost



Obrázek: Generováno pomocí AI: 2 young physicists study falling book cover.